Das Banach-Tarski-Paradox

Dominik A. Scheder

27. April 2003

1 Grundlagen

1.1 Das Auswahlaxiom

Definition 1.1 (Auswahlaxiom) *Sei A eine Menge von nichtleeren, paarweise disjunkten Mengen. Dann gibt es eine Menge X mit*

$$|a \cap X| = 1 \quad \forall a \in A$$

In Worten, es gibt eine Auswahlmenge *X, die von jeder Menge $a \in A$ genau ein Element enthält.*

Definition 1.2 (Auswahlaxiom, alternativ) *Sei A eine Menge von nichtleeren, paarweise disjunkten Mengen. Dann gibt es eine Funktion $choose : A \to \cup A$ mit $choose(a) \in a \ \forall a \in A$ ($\cup A$ bezeichnet die Vereinigung aller Mengen $a \in A$).*

Satz 1.1 *Diese beiden Definitionen sind äquivalent.*

Beweis. "$\Rightarrow$:" Sei also zu einer Menge A von nichtleeren Mengen eine Auswahlmenge X gegeben. Wir werden die zugehörige Auswahlfunktion f angeben. Mengentheoretisch gesehen ist eine Funktion f eine Relation, die die Bedingung

$$(a, b_1) \in f \wedge (a, b_2) \in f \longrightarrow b_1 = b_2$$

erfüllt. Wegen $|a \cap X| = 1 \quad \forall a \in A$ ist

$$f := \{(a, x) \in A \times X | x \in X \cap a\}$$

offensichtlich die gewünschte Auswahlfunktion.
"$\Leftarrow$:" Sei andererseits nun f die gegebene Auswahlfunktion zu A. Dann ist $X := \{f(a), a \in A\}$ eine Auswahlmenge. $\square$

Da das Auswahlaxiom nicht ganz unstrittig ist und – was ja Ziel unseres Vortrages ist – zu höchst kontraintuitiven Ergebnissen führen kann, werden wir jeden Satz, dessen Beweis das Auswahlaxiom verwendet, mit **AC** kennzeichnen.

1.2 Operationen von Gruppen auf Mengen

Definition 1.3 *Sei G eine Gruppe, e ihr neutrales Element und X eine nichtleere Menge. G* operiert auf *X, wenn es eine Abbildung $\circ : G \times X \to X$, geschrieben $g \circ x$ gibt, mit*

- $e \circ x = x \quad \forall x \in X$
- $(gh) \circ x = g \circ (h \circ x) \quad \forall g, h \in G, x \in X$

Jedes Gruppenelement definiert somit eine Bijektion $X \to X$.
Die Menge $G \circ x := \{g \circ x, g \in G\}$ heiße das *Orbit* von x.

Satz 1.2 *Zwei Orbits $G \circ x, G \circ y$ sind entweder disjunkt oder identisch.*

Beweis. Angenommen, $G \circ x, G \circ y$ seien nicht disjunkt. Dann gibt es ein $z \in (G \circ x \cap G \circ y)$ mit $z = g \circ x = h \circ y$, somit $x = (g^{-1}h) \circ y$. Nun gilt also $a \circ x = (ag^{-1}h) \circ y \quad \forall a \in G$, d. h. jedes Element $a \circ x$ aus dem Orbit $G \circ x$ läßt sich in der Form $a' \circ y$ mit $a' := ag^{-1}h$ darstellen, folglich gilt $G \circ x \subseteq G \circ y$. Analog gilt $G \circ y \subseteq G \circ x$, also $G \circ x = G \circ y$. Die Menge $G \circ X := \{G \circ x, x \in X\}$ ist somit eine Partition von X. □

Definition 1.4 *Die Gruppe G operiert auf X* ohne nichttriviale Fixpunkte*, wenn für alle $g \neq e$ gilt*

$$g \circ x \neq x \quad \forall x \in X$$

In diesem Falle gilt offensichtlich $g \neq h \Rightarrow g \circ x \neq h \circ x$ und wir kommen zu folgendem Satz:

Satz 1.3 (AC) *G operiere auf X ohne nichttriviale Fixpunkte. Dann ist jedes Orbit $O \in G \circ X$ bijektiv zu G, formal*

$$\forall O \in G \circ X \quad \exists f : G \to O, f \text{ bijektiv}$$

Beweis. Mit Auswahlaxiom gibt es eine Funktion *choose*, die aus jedem Orbit ein Element auswählt. Für ein beliebiges Orbit O können wir nun die Bijektion definieren:

$$f : G \to O, \quad g \mapsto g \circ o \quad (\text{mit } o := choose(O))$$

Da nach Vorraussetzung keine nichttrivialen Fixpunkte existieren, gilt $g \neq h \to g \circ o \neq h \circ o$, folglich ist f injektiv. Surjektiv ist f sowieso. □

2 Gleichzerlegbarkeit und Paradoxizität

Definition 2.1 *G operiere auf der Menge X. Zwei Mengen $A.B \subseteq X$ heißen* unter G gleichzerlegbar mit n Stücken *(wir schreiben $A \sim B$, wenn sich beide in je n Stücke zerlegen lassen und man diese durch Elemente aus G paarweise aufeinander abbilden kann, d. h. wenn*

$$A = \biguplus_{i=1}^{n} A_i, \quad B = \biguplus_{i=1}^{n} B_i$$

und es Elemente $g_1, \ldots, g_n$ aus G gibt, so daß $g_i(A_i) = B_i, 1 \leq i \leq n$ gilt.

Um die Anzahl der an der Zerlegung beteiligten Stücke hervorzuheben, werden wir auch $A \sim_n B$ schreiben.
Offensichtlich ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation, $\sim_n$ dagegen nicht. Ist jedoch $A \sim_n B$ und $B \sim_m C$, dann gilt immerhin $A \sim_{nm} C$.
Hat man eine Äquivalenzrelation $\sim$ von Mengen, so ist die Relation $\preceq$, definiert durch $A \preceq B :\Leftrightarrow \exists B' \subseteq B : \; A \sim B'$, offensichtlich reflexiv und transitiv, somit eine Quasiordnung auf der Menge der Äquivalenzklassen von $\sim$. In unserem Fall bedeutet $A \preceq B$,daß A gleichzerlegbar zu einer Teilmenge von B ist. Ist $A \sim_n B', B' \subseteq B$, so schreiben wir auch $A \preceq_n B$. Wir werden nun zeigen, daß $\preceq$ auch antisymmetrisch ist und somit eine Partialordnung darstellt.

Satz 2.1 (Banach-Schröder-Bernstein-Theorem) Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation von Mengen und $\preceq$ die zugehörige Quasiordnung. Erfülle ferner $\sim$ die folgenden Bedingungen

1. gilt $A \sim B$, dann gibt es eine Bijektion $g : A \to B$, so daß $g(C) \sim C$ für alle $C \subseteq A$
2. wenn $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset$ und $A_1 \sim B_1$, $A_2 \sim B_2$, dann $A_1 \uplus A_2 \sim B_1 \uplus B_2$.

Dann gilt $A \preceq B \wedge B \preceq A \longrightarrow A \sim B$, d. h. $\preceq$ ist eine Partialordnung auf der Menge der Äquivalenzklassen von $\sim$.

Beweis: Gelte $A \preceq B$ und $B \preceq A$, d. h. es gibt eine Teilmenge $B' \subseteq B$ mit $A \sim B'$, und nach 1. existiert eine Bijektion $f : A \to B'$. Analog existiert eine Bijektion $g : B \to A'$ für ein $A' \subseteq A$. Sei $C_0 := A \setminus A'$ und $C_{n+1} := gf(C_n)$, ferner $C := \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$. Dann gilt

$$g(B \setminus f(C)) = g(B) \setminus gf(C) = A' \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) = A \setminus (C_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) = A \setminus C$$

also, wegen der Wahl von g, $A \setminus C \sim B \setminus f(C)$. Wegen der Wahl von f gilt $C \sim f(C)$, und wegen 2. ist $(A \setminus C) \uplus C \sim (B \setminus f(C)) \uplus f(C)$, also $A \sim B$. $\square$

Offensichtlich erfüllt unsere Gleichzerlegbarkeitsrelation die Bedingungen 1. und 2., folglich ist $\preceq$ wirklich eine Partialordnung der Äquivalenzklassen von $\sim$. Leicht kann man sich davon überzeugen, daß $A \preceq_m B \wedge B \preceq_n A \Leftarrow A \sim_{n+m} B$ gilt.

Definition 2.2 (Paradoxizität) *Die Gruppe G operiere auf der Menge X. $E \subseteq X$ heiße G-*paradox*, wenn es zwei disjunkte Mengen $A, B \subseteq E$ gibt mit $A \sim E$ und $B \sim E$. Ist $A \sim_m E$ und $B \sim_n E$, dann nennen wir E* paradox mit $m + n$ Stücken.

Setzt man $X = \mathbf{R}^3$ und $G = SO_3$, und ist E eine kompakte Teilmenge des $\mathbf{R}^3$, also beispielsweise eine Kugel, dann bedeutet Paradoxizität anschaulich, daß man innerhalb der Kugel $n+m$ disjunkte Mengen findet, aus denen sich *zwei* Kugeln herstellen lassen, die beide die gleiche Größe wie das Original haben. Das ist schon mehr als nur Kugelverdopplung, weil wir hier nicht verlangen, daß die ganze "Masse" der Originalkugel verwendet wird. Man kann das aber leicht erreichen:

Satz 2.2 $E \subseteq X$ ist G-paradox genau dann, wenn es Mengen E_1, E_2 gibt mit $E_1 \uplus E_2 = E$ und $E_1 \sim E, \quad E_2 \sim E$.

Beweis. Sei E paradox, d. h. $E \sim A$ und $E \sim B$ für disjunkte $A, B \subseteq E$. Nun gilt $B \subseteq E \backslash A$ (da A und B disjunkt sind), also trivialerweise $B \preceq E \backslash A$. Andererseits gilt $E \setminus A \preceq B$ (wenn schon $E \preceq B$, dann auch sicherlich jede Teilmenge von E), also gilt wegen Antisymmetrie $E \setminus A \sim B$, somit $E \setminus A \sim E$. Die Gegenrichtung ist trivial. $\square$

3 Paradoxe Mengen

Nach diesem Vorspiel werden wir jetzt nun endlich eine paradoxe Menge angeben. Wie wir wissen, ist die *von der Menge M erzeugte freie nichtabelsche Gruppe F* die Menge aller Wörter über $\Sigma := \{\sigma, \sigma^{-1} : \sigma \in M\}$, mit der Konkatenation als Verknüpfung und dem leeren Wort als neutralem Element, wobei wir folgende Äquivalenz zwischen Wörtern einführen:

$$w\sigma\sigma^{-1}v \sim wv \quad \forall w, v \in \Sigma^*, \sigma \in \Sigma$$

(Nach Definition dürfen in freien Gruppen zwei syntaktisch verschiedene Terme nicht gleich sein, es sei denn, die Gleichheit folgt direkt aus den Gruppenaxiomen. Daher die obige Äquivalenz.) Die Elemente unserer Gruppe sind nun die Äquivalenzklassen der obigen Relation. Zu jeder Äquivalenzklasse gibt es genau ein *reduziertes* Wort, d. h. ein Wort, das weder ein Paar der Form $\sigma\sigma^{-1}$ noch $\sigma^{-1}\sigma$ enthält. Wir wählen daher die reduzierten Wörter als Repräsentanten für die Äquivalenzklassen. Leicht sieht man, daß zwei freie Gruppen genau dann isomorph sind, wenn ihre Erzeugermengen gleiche Kardinalität haben. Die Kardinalität der Erzeugermenge bezeichnet man als den *Rang* der freien Gruppe.

Satz 3.1 *Die freie Gruppe F vom Rang 2 operiere auf sich selbst durch Linksmultiplikation, d. h. $g \circ x := gx$. Dann ist F selbst F-paradox mit 4 Stücken.*

Beweis. Seien σ, τ die Erzeuger von F. Mit $\rho \in \{\sigma, \sigma^{-1}, \tau, \tau^{-1}\}$ bezeiche ρF die Menge aller Elemente aus F, die mit ρ beginnen. Dann gilt $F = \{\epsilon\} \uplus \sigma F \uplus \sigma^{-1} F \uplus \tau F \uplus \tau^{-1} F$
Da $\sigma^{-1}F$ die Menge aller Wörter ist, die mit σ^{-1} beginnen, ist $\sigma(\sigma^{-1}F)$ die Menge aller Wörter, die *nicht* mit σ beginnen. Also gilt $\sigma F \uplus \sigma(\sigma^{-1}F) = F = \tau F \uplus \tau(\tau^{-1}F)$ und F ist offensichtlich paradox mit 4 Stücken. □
Obwohl dieses Beispiel ziemlich künstlich und nicht besonders paradox aussieht, beruht darauf letztendlich auch die Kugelverdopplung. Wichtig dafür ist folgender Satz:

Satz 3.2 (AC) *Die Gruppe F sei F-paradox mit n Stücken und operiert auf der Menge M ohne nichttriviale Fixpunkte. Dann ist M selbst F-paradox mit n Stücken.*

Beweis. Nach Satz 1.3 gibt es für jedes Orbit $O \subseteq M$ eine Bijektion $\varphi_O : F \leftrightarrow O$. Folglich überträgt sich die paradoxe Zerlegung von F unmittelbar auf M. Seien also $F_1, \ldots, F_n \subseteq F$ die Teilmengen der paradoxen Zerlegung von M, d. h.

$$\bigcup_{1 \leq i \leq k} f_i(F_i) = F = \bigcup_{k+1 \leq i \leq n} f_i(F_i)$$

für passende $f_i \in F$, dann sind die

$$M_i := \biguplus_{O \subseteq M,\ O \text{ Orbit}} \varphi_O(F_i), \quad 1 \leq i \leq n$$

die paradoxe Zerlegung von M (die M_i sind paarweise disjunkt, da die F_i paarweise disjunkt sind und die φ_O bijektiv). □

4 Paradoxe Mengen im $\mathbf{R}^3$

Wir werden nun unsere bisherigen Überlegungen auf den $\mathbf{R}^3$ übertragen und schließlich zu geometrischen Paradoxa gelangen.
Wir nennen die Teilmenge S einer Gruppe G *unabhängig*, wenn die von S erzeugte Untergruppe frei ist. Ferner bezeichne SO_n die Isometriegruppe des $\mathbf{R}^n$.

Satz 4.1 *Es gibt zwei unabhängige Rotationen ϕ und ρ im $\mathbf{R}^3$. Folglich enthält SO_n für $n \geq 3$ eine freie Untergruppe vom Rang 2.*

Beweis. Seien ϕ, ρ Rotationen um die z-Achse, bzw. x-Achse, beide um den Winkel $\arccos \frac{1}{3}$, also

$$\phi^{\pm 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rho^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Um die Freiheit der von ϕ und ρ erzeugten Untergruppe zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß kein nichttriviales reduziertes Wort über $\phi, \phi^{-1}, \rho, \rho^{-1}$ gleich der Identität ist.
Nehmen wir also an, w sei ein nichttriviales Wort gleich der Identität. Dann ist offensichtlich auch $\phi w \phi^{-1} = \mathrm{Id} = \phi^{-1} w \phi$. Das heißt, es genügt zu zeigen, daß kein reduziertes Wort w, das rechts auf $\phi^{\pm 1}$ endet, gleich der Identität ist.
Dazu werden wir zeigen, daß für solche w stets $w(1,0,0) = (a, b\sqrt{2}, c)/3^k$ gilt, mit $a, b, c \in \mathbf{Z}$ und $3 \not| \, b$, folglich $w(1,0,0) \neq (1,0,0)$.
Wir zeigen dies durch Induktion über die Länge von w. Angenommen, w habe Länge 1, d. h. $w = \phi^{\pm 1}$. Dann ist $w(1,0,0) = (1, \pm 2\sqrt{2}, 0)/3 \neq (1,0,0)$. Sei nun $w = \phi^{\pm 1} w'$ oder $w = \rho^{\pm 1} w'$ mit $w'(1,0,0) = (a', b'\sqrt{2}, c')/3^{k-1}$. Multiplikation obiger Matrizen mit $w'(1,0,0)$ ergibt

$$\phi^{\pm 1} w'(1,0,0) = (a, b\sqrt{2}, c)/3^k, \quad a = a' \mp 4b',\ b = b' \pm 2a',\ c = 3c'$$

bzw.

$$\rho^{\pm 1} w'(1,0,0) = (a, b\sqrt{2}, c)/3^k, \quad a = 3a',\ b = b' \mp 2c',\ c = c' \pm 4b'$$

Nun gibt es vier Fälle, je nachdem, ob w die Form $\phi^{\pm 1}\rho^{\pm 1} v$, $\rho^{\pm 1}\phi^{\pm 1}$, $\phi^{\pm 2} v$ oder $\rho^{\pm 2} v$ hat, wobei v auch das leere Wort sein kann.
In den ersten zwei Fällen gilt $b = b' \pm 2a' = b' \pm 2(3a'') \equiv b' \not\equiv 0 \pmod 3$, bzw. $b = b' \mp 2c' = b' \mp 2(3c'') \equiv b' \not\equiv 0 \pmod 3$, wobei wir natürlich $b' \not\equiv 0 \pmod 3$ nach Induktionshypothese annehmen dürfen.
Im dritten Falle gilt $b = b' \pm 2a' = b' \pm 2(a'' \mp 4b'') = b' \pm 2a'' - 8b'' = b' + (b'' \pm 2a'') - 9b'' = 2b' - 9b'' \equiv 2b' \not\equiv 0 \pmod 3$. Der vierte Fall geht analog. Folglich ist b in keinem Falle durch 3 teilbar. $\square$

Unser nächstes Ziel ist nun die paradoxe Zerlegung der Kugelschale S^2. Leider operiert die von ϕ und ρ erzeugte Gruppe F auf S^2 nicht ohne nichttriviale Fixpunkte, da jedes Element aus F eine Rotation um eine Achse durch den Ursprung darstellt und somit die beiden Schnittpunkte der Achse mit S^2 nichttriviale Fixpunkte sind. Sei nun D die Menge aller solcher Schnittpunkte. Da zu jedem $w \in F$ genau zwei solche Punkte existieren und F abzählbar ist, ist auch D abzählbar. Ferner operiert F nun auf $S^2 \setminus D$ ohne nichttriviale Fixpunkte und wir erhalten:

Satz 4.2 (Hausdorff-Paradox, AC) *$S^2 \backslash D$ ist SO_3-paradox mit 4 Stücken, d. h. $S \setminus D = A \uplus B$ mit $S \setminus D \sim_2 A$ und $S \setminus D \sim_2 B$.*

Als nächsten Schritt müssen wir noch die abzählbare Menge D unterbringen:

Satz 4.3 *Sei D eine abzählbare Untermenge der S^2, dann gilt $S^2 \sim_2 (S^2 \setminus D)$.*

Beweis. Wir suchen eine Rotation ρ um den Ursprung, so daß $\rho^n(D) \cap \rho^m(D) = \emptyset\ \forall n \neq m$. Sei l eine Gerade durch den Ursprung, die keinen Punkt aus D trifft, und sei A die Menge aller Rotationen ρ um l mit $\rho(D) \cap D \neq \emptyset$. Dann gibt es zu jedem solchen ρ Punkte $P, Q \in D$ mit $\rho(P) = Q$. Offensichtlich ist eine Rotation eindeutig bestimmt durch ihre Achse und zwei Punkte, die sie aufeinander abbildet, d. h. wenn D abzählbar ist, muß auch A abzählbar sein. Sei nun $\bar{A}$ die Menge aller ρ mit $\rho^n \in A$ für ein $n > 0$. Dann ist auch $\bar{A}$ abzählbar und folglich gibt es eine Rotation ρ um l, die nicht in $\bar{A}$ liegt.
Nun muß offensichtlich $\rho^n(D) \cap D = \emptyset\ \forall n > 0$ gelten, also freilich auch $\rho^n \cap \rho^m = \emptyset\ \forall n \neq m$. ρ hat also die oben gewünschten Eigenschaften und wir setzen $\bar{D} := D \uplus \rho(D) \uplus \rho^2(D) \uplus \ldots$ Dann ist offensichtlich $\rho(\bar{D}) = \rho(D) \uplus \rho^2(D) \uplus \rho^3(D) \uplus \cdots = \bar{D} \setminus D$. Nun sehen wir

$$S^2 = \bar{D} \uplus (S^2 \setminus \bar{D}) \sim_2 \rho(\bar{D}) \uplus (S^2 \setminus \bar{D}) = \bar{D} \setminus D \uplus S^2 \setminus \bar{D} = S^2 \setminus D$$

was zu zeigen war. □

Kombiniert man die beiden oberen Sätze, so erhält man $S^2 \sim_4 A$ und $S^2 \sim_4 B$. Das ist die gewünschte paradoxe Zerlegung der Kugelschale, allerdings bleibt noch etwas Masse übrig, da $A \cup B$ eine echte Untermenge von S^2 ist. Mit Satz 2.2 erkennt man jedoch $S^2 \sim_5 (S^2 \setminus A)$ und somit ist S^2 paradox mit 9 Stücken.
Offensichtlich hängt obige Konstruktion nicht vom Radius der Kugelschale ab, so daß wir für jede Kugelschale S^2_α vom Radius α eine paradoxe Zerlegung $S^2_\alpha = A_{\alpha,1} \uplus \cdots \uplus A_{\alpha,9}$ haben. In dem wir jede S^2_α nach gleichem Muster zerlegen, also

$$A_i := \bigcup_{0<\alpha\leq 1} A_{\alpha,i}$$

erhalten wir eine paradoxe Zerlegung von $K \backslash \{\mathbf{0}\}$, wobei K die Einheitskugel im $\mathbf{R}^3$ ist. Der letzte Schritt wird nun sein, auch den Mittelpunkt der Kugel in die paradoxe Zerlegung mit aufzunehmen. Dazu nehmen wir eine Achse durch $P = (0, 0, \frac{1}{2})$, die nicht den Ursprung schneidet, und wählen eine Rotation ρ von unendlicher Ordnung um diese Achse (d. h. kein ganzzahliges Vielfaches von ρ kann die Identität sein). Dann setzen wir $D = \{\rho^n(\mathbf{0}) : n \geq 0\}$ und es gilt $\rho(D) = D \setminus \{\mathbf{0}\}$, also $K \sim_2 K \setminus \{\mathbf{0}\}$. Nun sind wir am Ziel und können zusammenfassen:

Satz 4.4 (Banach-Tarski-Paradox, AC) *Die Einheitskugel K im $\mathbf{R}^3$ ist SO_3-paradox.*

Insgesamt kommt unsere paradoxe Zerlegung mit maximal 18 Stücken aus. Da das noch ziemlich viele Stücke sind, wurde viel Mühe darauf verwandt, diese Zahl zu reduzieren, und mit ein wenig Mehrarbeit kann man zeigen, daß 5 Stücke ausreichen, aber auch das Minimum darstellen. Dies soll aber nicht mehr Teil unseres Vortrages sein.